Δεύτερη θεμελιώδης μορφή:

05-12-19

$$R_p(\omega_1,\omega_2) = \langle L_p\omega_1 , \omega_2 \rangle_p$$

$II_p : T_pS \to \mathbb{R}$, $\quad II_p(\omega) = \langle L_p\omega , \omega \rangle_p$.

Ο πίνακας της 2ης θεμελ. μορφής ως προς την βάση x_u, x_v είναι: $\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$, όπου $e, f, g : U \to \mathbb{R}$ (θεμελ. ποσά 2ης τάξης)

$e = \langle Lx_u , x_u \rangle$

$f = \langle Lx_u , x_v \rangle = \langle Lx_v , x_u \rangle$

$g = \langle Lx_v , x_v \rangle$

$\omega = a x_u + b x_v \Rightarrow II_p(\omega) = ea^2 + 2fab + gb^2$.

$L x_u = -(N\circ x)_u = -N_u$

$L x_v = -(N\circ x)_v = -N_v$

$N = \dfrac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|} = \dfrac{x_u \times x_v}{\sqrt{EG-F^2}}$

Κάθετη καμπυλότητα:

Ορισμός: Έστω S προσανατολισμένη επιφάνεια. Καλούμε κάθετη καμπυλότητα της S στο σημείο της P, για την εφαπτομενική διεύθυνση $\omega \in T_pS \setminus \{0\}$, τον αριθμό

$$K_n(\omega) = \frac{II_p(\omega)}{I_p(\omega)}$$

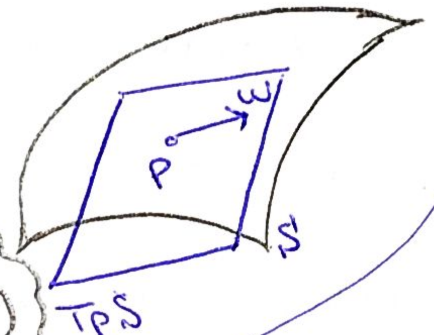
(κύλινδρος)

$$K_n(\omega) = \frac{1}{r} \cdot \frac{I_p(\omega) - \omega_3^2}{I_p(\omega)}$$

$$\iff$$

$$K_n(\omega) = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{\omega_3^2}{\|\omega\|^2}\right)$$

$$0 \leq K_n(\omega) \leq \frac{1}{r}.$$



- $\omega = a x_u + b x_v \implies$

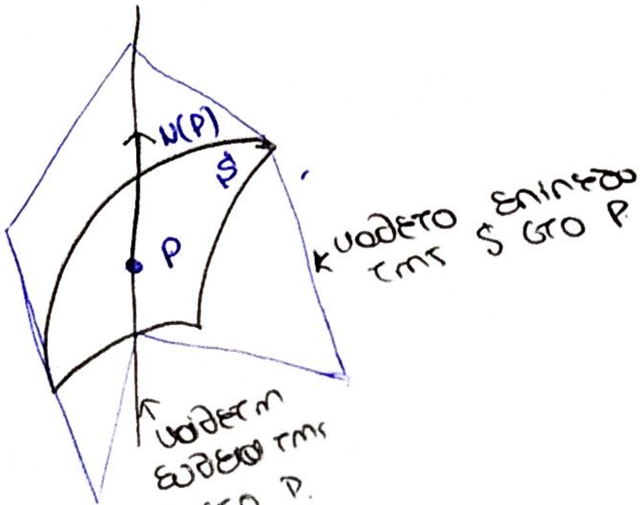
$$K_n(\omega) = \frac{e a^2 + 2 f ab + g b^2}{E a^2 + 2 F ab + G b^2}$$

- $K_n(x_u) = \dfrac{e}{E}, \quad K_n(x_v) = \dfrac{g}{G}$

$\lambda \neq 0$,

$$k_n(\lambda\omega) = \frac{II_p(\lambda\omega)}{I_p(\lambda\omega)} = \frac{\lambda^2 II_p(\omega)}{\lambda^2 I_p(\omega)}$$

$$k_n(\lambda\omega) = k_n(\omega)$$



(κάθε επίπεδο που περιέχει το κάθετο)

~o~o~o~o~o~o

$\|\omega\| = 1$, $k_n(\omega) = ?$

↳ Θεωρώ κανονική καμπύλη με καμπυλότητα $\kappa: (-\varepsilon,\varepsilon) \to [0,+\infty)$ $c: (-\varepsilon,\varepsilon) \to S$ με $c(0)=p$ και $c'(0)=\omega$

Υποθέτω ότι η c παραμετρίζεται με φυσική παράμετρο

$$k_n(\omega) = \frac{II_p(\omega)}{I_p(\omega)} = II_p(\omega) = \langle L_p\omega, \omega\rangle_p = -\langle dN_p(\omega), \omega\rangle_p$$

$$= -\langle (N\circ c)^{\cdot}(0), \dot c(0)\rangle = -\frac{d}{ds}\Big|_0 \left(\cancel{\langle N\circ c(s), \dot c(s)\rangle}\right)$$

$$+ \langle N\circ c(0), \ddot c(0)\rangle = \langle N(p), \ddot c(0)\rangle$$

Αν $\kappa(0) = 0$, τότε $k_n(\omega) = 0$

Υποθέτω ότι $\kappa(0) > 0$. Άρα λόγω συνέχειας $\kappa(s) > 0$, $\forall s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$

$\Rightarrow \ddot c(0) = \dot{\vec t}(0) = \kappa(0)\vec n(0)$

Άρα αν $\kappa(0) > 0$, έχω το εξής: $k_n(\omega) = k_n(\dot c(0)) =$

$= \kappa(0)\langle N(p), \vec n(0)\rangle$

$k_n(\dot c(0)) = \kappa(0)\cos\theta$, $\theta = \measuredangle(N(p), \vec n(0))$

Αν c είναι η τομή της S με κάθετο επίπεδο της στο $p \in S$ τότε $k_n(\omega) = \pm\kappa(0)$.

Θεώρημα: Έστω S προσανατολισμένη επιφάνεια. Για κάθε σημείο $P \in S$ υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{e_1(P), e_2(P)\}$ του T_PS τ.ω $L_P e_1(P) = k_1(P)\, e_1(P)$

$L_P e_2(P) = k_2(P)\, e_2(P)$ και

$$k_1(P) = \max\{ II_P(w) \mid w \in T_PS,\ \|w\| = 1\} = \max\{ k_n(w) \mid w \in T_PS, \|w\| = 1\}$$

$$k_2(P) = \min\{ II_P(w) \mid w \in T_PS,\ \|w\| = 1\} = \min\{ k_n(w) \mid w \in T_PS, \|w\| = 1\}$$

(4)

Κύριες διευθύνσεις - κύριες καμπυλότητες:

Ορισμός: Το σύνολο $\{e_1(P), e_2(P)\}$ καλούνται κύριες διευθ. στο P, ενώ οι αριθμοί $k_1(P), k_2(P)$ καλούνται κύριες καμπυλότητες της S στο P.

$L_P : T_PS \to T_PS$. Ο πίνακας L_P είναι

$$\begin{pmatrix} k_1(P) & 0 \\ 0 & k_2(P) \end{pmatrix}$$

Καμπυλότητα Gauss - Μέση καμπυλότητα :

Ορισμός: Καλούμε καμπυλότητα Gauss μια προσανατολισμένη επιφάνεια S, την συνάρτηση $K: S \to \mathbb{R}$, $K(p) = \det L_p$.

Ορισμός: Καλούμε μέση καμπυλότητα την συνάρτηση $H: S \to \mathbb{R}$.

με $H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{trace} L_p$

Άρα καμπυλότητα Gauss: $\boxed{K = k_1 k_2}$

μέση καμπυλότητα: $\boxed{H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)}$

$$\boxed{\chi_{L_p}(t) = t^2 - 2H(p)t + K(p)}$$

$$\Delta = 4H^2(p) - 4K(p) = 4\left(H^2(p) - K(p)\right)$$

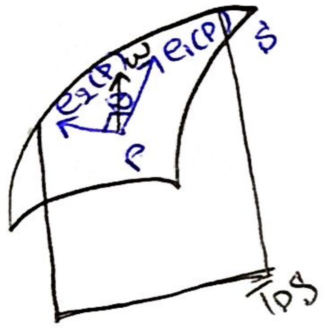
ισχύει ότι $H^2(p) \geq K$

οπότε ρίζες: $\dfrac{2H(p) \pm 2\sqrt{H^2(p) - K(p)}}{2}$

$$\boxed{k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}} \qquad \boxed{k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}}$$

Τύπος Euler :

$w \in T_pS$, $\|w\| = 1$, $k_n(w) = ?$



$\theta = \measuredangle(w, e_1(p))$

Τότε $w = \cos\theta\, e_1(p) + \sin\theta\, e_2(p)$

$$k_n(w) = \frac{II_p(w)}{I_p(w)} = II_p(w) = \langle L_p w, w\rangle_p$$

$$= \langle L_p(\cos\theta\, e_1(p) + \sin\theta\, e_2(p)), \cos\theta\, e_1(p) + \sin\theta\, e_2(p)\rangle_p =$$

$$= \langle \cos\theta\, L_p e_1(p) + \sin\theta\, L_p e_2(p), \cos\theta\, e_1(p) + \sin\theta\, e_2(p)\rangle$$

$$= \langle \cos\theta\, k_1(p)\, e_1(p) + \sin\theta\, k_2(p)\, e_2(p), \cos\theta\, e_1(p) + \sin\theta\, e_2(p)\rangle,$$

$w = \cos\theta\, e_1(p) + \sin\theta\, e_2(p) \Rightarrow$

$$k_n(w) = k_1(p)\cos^2\theta + k_2(p)\sin^2\theta.$$

ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ EULER

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της L_p είναι:

$$X(t) = \begin{vmatrix} k_1(p) - t & 0 \\ 0 & k_2(p) - t \end{vmatrix} = t^2 - (k_1(p) + k_2(p))t + k_1(p)k_2(p)$$

$$X(t) = t^2 - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ίχνος}}}{\operatorname{tras} L_p}\; t + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ορίζουσα}}}{\det L_p}$$

Πρόταση: Έστω $X: U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ σύστημα συνων της S.

Τότε η καμπυλότητα Gauss και η μέση καμπυλότητα δίνεται αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$\boxed{K \circ X = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.} \quad , \ K : S \to \mathbb{R}$$

$$\boxed{H \circ X = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}} \quad , \ H : S \to \mathbb{R}$$

είναι διαφορισ.

$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$

$k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$

οι οποίες δεν είναι διαφορ., είναι όμως συν εχ

Επιφάνειες γραφήματα:

$h: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ λεία.

$\Gamma_h = \{(x,y,h(x,y)) \mid (x,y) \in U\}$

$X: U \to \Gamma_h : X(x,y) = (x,y,h(x,y))$

$$N = \frac{(-h_x, -h_y)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}}, \quad X_x = (1,0,h_x), \quad X_y = (0,1,h_y)$$

$E = \|X_x\|^2 = 1 + h_x^2$

$F = \langle X_x, X_y \rangle = h_x h_y$

$G = \|X_y\|^2 = 1 + h_y^2$

$e = \langle X_{xx}, N \rangle = \dfrac{h_{xx}}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}}$

$f = \langle X_{xy}, N \rangle = \dfrac{h_{xy}}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}}$

$g = \langle X_{yy}, N \rangle = \dfrac{h_{yy}}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}}$

$X_{xx} = (0,0,h_{xx})$

$X_{xy} = (0,0,h_{xy})$

$X_{yy} = (0,0,h_{yy})$

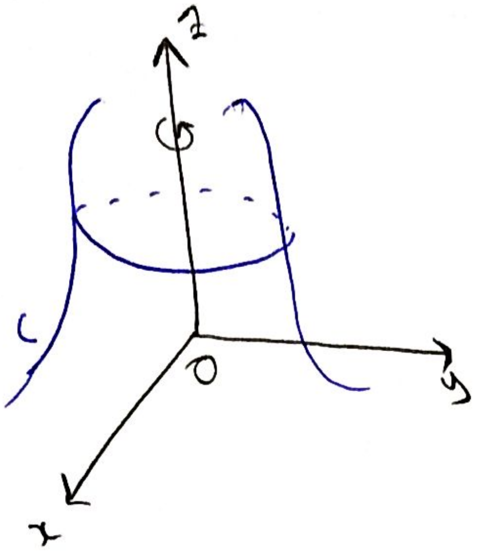
$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + h_x^2 & h_x h_y \\ h_x h_y & 1 + h_y^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}} \begin{pmatrix} h_{xx} & h_{xy} \\ h_{xy} & h_{yy} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{K = \frac{h_{xx} h_{yy} - h^2_{xy}}{(h_x^2 + h_y^2 + 1)}}$$

$$\boxed{H = \frac{(1 + h_y^2) h_{xx} - 2 h_x h_y h_{xy} + (1 + h_x^2) h_{yy}}{2 (h_x^2 + h_y^2 + 1)^{3/2}}}$$

...κ περιστροφής επιφάνεια:



$c: I \to Oxz$ με παράμετρο το μήκος τόξου και παραμετρική παράσταση

$c(s) = (\phi(s), 0, \psi(s))$

$\phi(s) > 0$

$(\dot\phi(s))^2 + (\dot\psi(s))^2 = 1, \forall s \in I$

$X: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$X(s,\theta) = (\phi(s)\cos\theta, \phi(s)\sin\theta, \psi(s))$

$N = \dfrac{X_s \times X_\theta}{\|X_s \times X_\theta\|}$, $\quad X_s(s,\theta) = (\dot\phi(s)\cos\theta, \dot\phi(s)\sin\theta, \dot\psi(s))$

$X_\theta(s,\theta) = (-\phi(s)\sin\theta, \phi(s)\cos\theta, 0)$

$$X_s \times X_\theta(s,\theta) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \dot\phi(s)\cos\theta & \dot\phi(s)\sin\theta & \dot\psi(s) \\ -\phi(s)\sin\theta & \phi(s)\cos\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-\phi(s)\dot\psi(s)\cos\theta, -\phi(s)\dot\psi(s)\sin\theta, \phi(s)\dot\phi(s))$$

$$\|X_s \times X_\theta(s,\theta)\| = \sqrt{\phi^2(s)\cdot(\dot\psi(s))^2 + \phi^2(s)(\dot\phi(s))^2} = \phi(s)$$

$$\boxed{N(s,\theta) = (-\dot\psi(s)\cos\theta, -\psi(s)\sin\theta, \dot\phi(s))}$$

$E = \|X_s\|^2 = (\dot\phi(s))^2 + (\dot\psi(s))^2 = 1$

$F = \langle X_s, X_\theta \rangle = 0$

$G = \|X_\theta\|^2 = \phi^2$,

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \phi^2(s) \end{pmatrix}$$

$$X_{ss}(s,\theta) = (\ddot{\phi}(s)\cos\theta, \ddot{\phi}(s)\sin\theta, \ddot{\psi}(s))$$

$$X_{s\theta}(s,\theta) = (-\dot{\phi}(s)\sin\theta, \dot{\phi}(s)\cos\theta, 0)$$

$$X_{\theta\theta}(s,\theta) = (-\phi(s)\cos\theta, -\phi(s)\sin\theta, 0)$$

$$e = \langle X_{ss}, N\rangle = -\ddot{\phi}\dot{\psi}\cos^2\theta = \ddot{\phi}\dot{\psi}\sin^2\theta = \ddot{\psi}\dot{\phi}.$$

$$\left.\begin{aligned} &\boxed{e = \dot{\phi}\ddot{\psi} - \dot{\psi}\ddot{\phi}} \\ &\boxed{f = \langle X_{s\theta}, N\rangle = 0} \\ &\boxed{g = \langle X_{\theta\theta}, N\rangle = \phi\dot{\psi}} \end{aligned}\right\} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi}\ddot{\psi} - \dot{\psi}\ddot{\phi} & 0 \\ 0 & \phi\dot{\psi} \end{pmatrix}$$